ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Option biochimie - biologie)

DURÉE : 2 heures

N.B. – Les candidats sont priés :

1° D'écrire très lisiblement, de soigner la rédaction et la présentation matérielle. Il convient de numéroter les diverses questions en les séparant très nettement, de respecter les notations de l'énoncé.

2° De donner les explications nécessaires et suffisantes en faisant figurer sur la copie tous les calculs intermédiaires.

3° De donner les résultats encadrés.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée

Tournez la page S.V.P.

Les trois exercices sont indépendants.

EXERCICE I

Dans certaines exploitations agricoles on utilise deux types de compléments alimentaires, le type A et le type B.
Ces produits sont utilisés par paquets de 5 kilogrammes.
On fait une enquête portant sur le nombre de kilogrammes utilisés par jour dans 10 exploitations différentes, numérotées de 1 à 10, et on obtient les résultats suivants :

EXPLOITATION N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Produit A (en kg)	10	15	15	10	10	15	20	15	20	20
Produit B (en kg)	5	15	10	10	10	5	10	10	15	10

On choisit une exploitation au hasard parmi les dix.
À ce tirage on associe deux variables aléatoires X et Y définies par :
X : nombre de kilogrammes de produit A utilisés par jour.
Y : nombre de kilogrammes de produit B utilisés par jour.

1. Montrer que la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant où a est un réel que l'on déterminera.

X \ Y	5	10	15
10	0,1	a	0
15	0,1	a	0,1
20	0	a	0,1

2. a) Déterminer la loi de X.
   b) Calculer l'espérance E(X) de X et la variance V(X) de X.

3. a) Déterminer la loi de Y.
   b) Calculer l'espérance E(Y) de Y et la variance V(Y) de Y.

4. Calculer cov(X,Y).
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

5. a) Déterminer la loi de la variable conditionnelle $Y / X = 10$.
   Calculer l'espérance $E(Y / X = 10)$.
   b) Calculer les espérances $E(Y / X = 15)$ et $E(Y / X = 20)$.
   c) Que peut-on déduire du calcul des trois espérances des questions a) et b) ?

6. On désigne par S la variable égale au poids total en kilogrammes des compléments alimentaires utilisés par jour.
   Calculer l'espérance et la variance de la variable S.

7. Le prix d'un kilogramme de produit A est de 6 euros et celui d'un kilogramme de produit B est de 8 euros.
   Le coût journalier, en euros, des compléments alimentaires est donné par la variable aléatoire C.
   a) Exprimer la variable C à l'aide des variables X et Y.
   b) Calculer l'espérance et la variance de la variable C.

EXERCICE II

1. On considère la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \begin{cases} \lambda t(30 - t) & \text{si } t \in]0, 30[\\ 0 & \text{si } t \notin]0, 30[\end{cases}$$

où λ est un réel donné.

Déterminer λ pour que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue.

2. La durée de séjour, en minutes, d'un bovin dans une salle de traite est une variable aléatoire D qui admet f comme densité.

a) Déterminer la fonction de répartition F_D de la variable D.

b) Calculer l'espérance mathématique E(D) de D.

c) Déterminer l'écart-type de la variable D.

3. Soit N un entier supérieur ou égal à 1 et a un réel appartenant à $]0, 30[$.

À l'instant t = 0 il y a N bovins dans la salle de traite et l'on s'intéresse au nombre Q(a) de bovins qui vont la quitter dans l'intervalle de temps $[0, a]$.

On suppose que les comportements des différents bovins sont indépendants et que pendant l'intervalle de temps considéré aucun nouveau bovin n'est entré dans la salle.

On numérote les N bovins de 1 à N et on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le bovin numéro i est sorti de la salle avant l'instant a, 0 sinon.

a) Déterminer la loi de la variable X_i et son espérance.

b) Déterminer la loi de la variable Q(a).

c) Donner l'espérance et la variance de Q(a).

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE III

Pour un cheptel déterminé on détecte , en moyenne, un problème sanitaire bénin un jour sur dix, c'est à dire la probabilité de détecter un problème sanitaire bénin un jour n est de 0,1. D'autre part, la probabilité pour que l'on détecte un problème un jour donné sachant que l'on en a détecté un le jour précédent est égale à 0,6.

Soit n un entier naturel non nul, on note I_n l'événement :

" On détecte un problème sanitaire bénin le jour n "

1. Calculer la probabilité pour que l'on détecte un problème deux jours consécutifs.

2. On fait les hypothèses suivantes :

$$H_1 : \quad P\left(I_{n+2} / I_{n+1} \cap I_n\right) = P\left(I_{n+2} / I_{n+1}\right)$$

$$H_2 : \quad P\left(I_{n+2} / \overline{I_{n+1}} \cap I_n\right) = P\left(I_{n+2} / \overline{I_{n+1}}\right)$$

$$H_3 : \quad P\left(I_{n+2} / I_{n+1} \cap \overline{I_n}\right) = P\left(I_{n+2} / I_{n+1}\right)$$

$$H_4 : \quad P\left(I_{n+2} / \overline{I_{n+1}} \cap \overline{I_n}\right) = P\left(I_{n+2} / \overline{I_{n+1}}\right)$$

a) Donner une interprétation concrète de ces hypothèses.

b) Sachant que l'on a détecté un problème un jour donné quelle est la probabilité pour que l'on détecte un problème chacun des deux jours suivants ?

c) Quelle est la probabilité pour que l'on détecte un problème un jour donné sachant que l'on n'a pas détecté de problème la veille ?

d) Quelle est la probabilité de détecter un problème bénin un jour donné sachant que l'on en a détecté un deux jours avant ?

e) Les événements I_n et I_{n+2} sont-ils indépendants ? (Justifier)